

# Chapitre 3 : Déterminant

## 3.1 Définition

### Définition 3.1

*Déterminant*

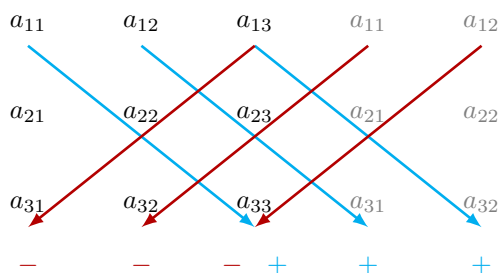
- Le déterminant de la matrice  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$  est le nombre

$$\det(A) = ad - bc.$$

- Le déterminant de la matrice  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$  est le nombre

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Le déterminant d'une matrice de taille  $3 \times 3$ , **et uniquement de taille  $3 \times 3$**  peut être calculé à l'aide de la *Règle de Sarrus* :



On peut réécrire le déterminant d'une matrice de taille  $3 \times 3$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$



**Définition 3.3**

Soit  $A = (a_{jk})$  une matrice carrée de taille  $n \times n$ .  
Le *cofacteur*  $(j, k)$  de  $A$  est le nombre

$$C_{jk} = (-1)^{j+k} \det(A_{jk}).$$

En utilisant les cofacteurs, le déterminant de la matrice  $A$  devient

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + a_{14}C_{14} + \dots + a_{1n}C_{1n} = \sum_{k=1}^n a_{1k}C_{1k}.$$

**Théorème 3.4**

*Développement par rapport à la  $j$ -ième ligne*

Soit  $A = (a_{jk})$  une matrice carrée de taille  $n \times n$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{j+1}a_{j1} \det(A_{j1}) + (-1)^{j+2}a_{j2} \det(A_{j2}) + \dots + (-1)^{j+n}a_{jn} \det(A_{jn}) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} a_{jk} \det(A_{jk}), \end{aligned}$$

ou encore

$$\det(A) = a_{j1}C_{j1} + a_{j2}C_{j2} + a_{j3}C_{j3} + a_{j4}C_{j4} + \dots + a_{jn}C_{jn} = \sum_{k=1}^n a_{jk}C_{jk}.$$

*Démonstration.* Admis. □

Ce théorème indique que l'on peut calculer un déterminant en développant par rapport à n'importe quelle ligne. Il est donc judicieux, lors d'un calcul pratique de bien choisir la ligne pour minimiser la complexité des calculs, par exemple, dans le cas où une ligne contient beaucoup de zéros.

**Exemples.** Développement par rapport à la 2-ème ligne :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} &= 2(-1)^{2+1} \underbrace{\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}_{=0} + 4(-1)^{2+2} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}_{=0} \\ &\quad + (-6)(-1)^{2+3} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}_{=3} \\ &= 0 + 0 + 6 \cdot 3 = 18 \end{aligned}$$

Développement par rapport à la 3-ième ligne :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} &= 0(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} + 3(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} \\ &\quad + 0(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -3 \cdot (-6) = 18 \end{aligned}$$

### Corollaire 3.5

Si une matrice  $A$  contient une ligne formée de zéros, alors son déterminant est nul :  $\det(A) = 0$ .

## 3.2 Propriétés fondamentales

Pour calculer le déterminant d'une matrice de taille  $4 \times 4$ , il faut donc calculer quatre déterminants de matrices de taille  $3 \times 3$  et pour chacun de ceux-ci, il faut calculer trois déterminants de matrices de taille  $2 \times 2$ . Pour calculer le déterminant d'une matrice de taille  $5 \times 5$ , il faut calculer  $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$  déterminants de taille  $2 \times 2$  et ainsi de suite. Nous avons donc intérêt à trouver une méthode qui demande moins de calculs.

Nous allons voir maintenant une suite de théorèmes qui permettent d'optimiser les calculs de déterminants.

### Théorème 3.6

#### Déterminant et opérations élémentaires

Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice agissent sur le déterminant de la manière suivante.

Soit  $A$  et  $C$  deux matrices carrées de taille  $n \times n$ .

**Type 1** Si  $A \stackrel{L_j \leftrightarrow L_k}{\sim} C$  alors  $\det(C) = -\det(A)$ .

**Type 2** Si  $A \stackrel{L_j \leftarrow \lambda L_j}{\sim} C$  (avec  $\lambda \neq 0$ ) alors  $\det(C) = \lambda \det(A)$  ou  $\det(A) = \frac{1}{\lambda} \det(C)$ .

**Type 3** Si  $A \stackrel{L_j \leftarrow L_j + \lambda L_k}{\sim} C$  alors  $\det(C) = \det(A)$ .

*Vérification dans le cas  $n = 2$  :*

Soit  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ . Nous avons  $\det(A) = ad - bc$  et

a)  $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - ad = -\det(A)$ .

b)  $\begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{vmatrix} = \lambda ad - \lambda bc = \lambda(ad - bc) = \lambda \det(A)$ .

c)  $\begin{vmatrix} a + \lambda c & b + \lambda d \\ c & d \end{vmatrix} = (a + \lambda c)d - (b + \lambda d)c = ad - bc = \det(A)$ .

**Exemple.** Calculer le déterminant de la matrice  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ .

Nous allons utiliser des opérations élémentaires pour simplifier le calcul.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} & \stackrel{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} \\
& \stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} \\
& \stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & -8 \end{vmatrix} \\
& \stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Comme la matrice finale possède une ligne de zéros, son déterminant est nul, d'après le théorème 3.4. Donc  $\det(A) = 0$ .

#### Corollaire 3.7

Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $n \times n$  et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$

*Démonstration.* Appliquons, ligne après ligne, l'opération élémentaire de type 2. Le calcul nous

donne :

$$\begin{aligned}
 \det(\lambda A) &= \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} \\
 &= \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} \\
 &= \lambda^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} \\
 &= \dots \\
 &= \lambda^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
 &= \lambda^n \det(A)
 \end{aligned}$$

□

**Corollaire 3.8***Effet global des opérations élémentaires*

Soit  $A$  une matrice carrée et soit  $C$  une matrice équivalente à  $A$  par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes.

Il existe  $\alpha \neq 0$  tel que

$$\det(C) = \alpha \det(A),$$

où  $\alpha$  est le produit des facteurs introduits par chaque opération élémentaire.

*Démonstration.* Chaque opération élémentaire modifie le déterminant comme indiqué dans le théorème 3.6. En les composant, les effets se multiplient : la constante globale  $\alpha$  est le produit des facteurs associés à chaque étape. □

**Théorème 3.9**

$$\det(A^T) = \det(A)$$

Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $n \times n$  et  $A^T$  sa matrice transposée. Nous avons

$$\det(A^T) = \det(A).$$

*Démonstration.* Admis dans le cas général.

Vérification dans le cas  $n = 2$  :

Nous avons  $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ . □

**Remarque importante 3.10**

Grâce à ce théorème, on peut remplacer le mot « ligne » par le mot « colonne » dans tous les résultats concernant le calcul du déterminant. Par exemple :

- Si la matrice  $A$  possède une colonne formée de zéros alors  $\det(A) = 0$ .
- On peut faire un développement par rapport à la  $k$ -ème colonne :

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+k} a_{1k} \det(A_{1k}) + (-1)^{2+k} a_{2k} \det(A_{2k}) + \dots + (-1)^{n+k} a_{nk} \det(A_{nk}) \\ &= a_{1k} C_{1k} + a_{2k} C_{2k} + \dots + a_{nk} C_{nk}. \end{aligned}$$

- On peut faire des opérations élémentaires sur les colonnes pour introduire des zéros dans la matrice.

**Théorème 3.11***Déterminant de matrice triangulaire*

Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) alors :

$$\det(A) = a_{11} a_{22} a_{33} \cdots a_{nn}.$$

*Démonstration.* Supposons que  $A$  est une matrice triangulaire inférieure. Le calcul nous donne :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \dots = a_{11} a_{22} \cdots a_{n-2, n-2} \begin{vmatrix} a_{n-1, n-1} & 0 \\ a_{n, n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} a_{22} \cdots a_{n-1, n-1} a_{nn}. \end{aligned}$$

Le calcul est analogue dans le cas où  $A$  est une matrice triangulaire supérieure :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= (-1)^{n+n} a_{nn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1, n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n-1, n-1} \end{vmatrix} \\ &= \dots = a_{nn} \cdots a_{22} a_{11} \end{aligned}$$

□

**Exemple.** Calculer le déterminant de la matrice  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ .

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Donc  $\det(A) = 1 \cdot 1 \cdot 5 = 5$

### Théorème 3.12

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices carrées de taille  $n \times n$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$ . Alors

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

*Démonstration.* Admis dans le cas général.

Vérification dans le cas  $n = 2$  :

Soient  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  et  $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \begin{vmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{vmatrix} \\ &= (ae + bg)(cf + dh) - (af + bh)(ce + dg) \\ &= eh(ad - bc) - fg(ad - bc) \\ &= (ad - bc)(eh - fg) \\ &= (\det A)(\det B). \end{aligned}$$

□

**Remarques 3.3.0.13.** 1. Même si  $AB \neq BA$  en général, nous avons toujours

$$\det(AB) = \det(BA).$$

2. Le théorème 3.6 peut être reformulé à l'aide du produit de matrices élémentaires. En effet,

$$\det(EA) = \det(E) \det(A) \quad \text{donc} \quad \det(A) = \frac{\det(EA)}{\det(E)}$$

$$\text{où } \det(E) = \begin{cases} -1 & \text{si } E \text{ est une matrice élémentaire de type 1} \\ \lambda & \text{si } E \text{ est une matrice élémentaire de type 2} \\ 1 & \text{si } E \text{ est une matrice élémentaire de type 3} \end{cases}$$

### Remarque importante 3.14

Attention !  $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$  en général.

### 3.3 Méthodes pratiques de calcul

#### Méthode 3.15

Pour calculer un déterminant, on peut :

- développer par rapport à une ligne ou à une colonne,
- faire des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes,
- combiner les deux.

On pourra transformer une matrice en une matrice équivalente triangulaire, ou transformer une matrice en une matrice équivalente qui contient une ligne ou une colonne avec beaucoup de coefficients nuls.

**Exemples.** 1. Calculer le déterminant de la matrice  $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ .

Nous commençons par factoriser la première ligne, puis nous utilisons des opérations élémentaires.

$$\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 \\ = \end{array} \quad 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ = \end{array} \quad 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ = \end{array} \quad 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ = \end{array} \quad 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} \end{array}$$

La matrice finale est triangulaire supérieure. D'après le théorème 3.11, nous avons :

$$\det(A) = 3 \cdot 1 \cdot (-3) \cdot (-3) = 27.$$

2. Calculer le déterminant de la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Observons que la ligne  $L_4$  contient plusieurs zéros. Simplifions d'abord la colonne  $C_3$  pour créer plus de zéros.

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} & \stackrel{C_3 \leftarrow C_3 - 2C_4}{=} & \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\
& & & \stackrel{\text{dév. } L_4}{=} & (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\
& & & & \stackrel{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{=} & \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\
& & & & \stackrel{L_4 \leftarrow L_4 - L_2}{=} & \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
& & & & \stackrel{\text{dév. } C_1}{=} & (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
& & & & \stackrel{\text{dév. } C_3}{=} & -(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \\
& & & & = & -(-2 \cdot (-5) - 2 \cdot 1) = -8
\end{aligned}$$

Donc  $\det(B) = -8$ .

3. Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Observons que la matrice est quasiment triangulaire. En agissant sur la colonne  $C_4$ , on peut rapidement trouver son déterminant.

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \stackrel{C_4 \leftarrow C_4 - 3C_1}{=} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -20 \end{vmatrix} \\
& & & = & 1 \cdot 7 \cdot 3 \cdot (-20) \\
& & & = & -420
\end{aligned}$$

## 3.4 Inversibilité d'une matrice

### Théorème 3.16

### Déterminant des matrices inversibles

Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $n \times n$ . Alors nous avons l'équivalence

$$A \text{ est inversible} \iff \det(A) \neq 0$$

*Démonstration.* ( $\Rightarrow$ ) Si  $A$  est inversible, alors il existe une matrice  $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que

$$AA^{-1} = I_n = A^{-1}A.$$

Comme  $\det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1$ , alors  $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$ , donc  $\det(A) \neq 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Supposons que  $A$  n'est pas inversible, montrons que  $\det(A) = 0$ .

D'après le théorème de caractérisation des matrices inversibles 2.23,  $A$  ne possède pas  $n$  positions pivot et de ce fait, la matrice échelonnée réduite,  $R$ , associée à  $A$  contient au moins une ligne de zéros. En développant par rapport à cette ligne, on obtient que  $\det(R) = 0$ .

Or d'après le corollaire 3.8, il existe  $\alpha \neq 0$  tel que

$$\det(R) = \alpha \det(A).$$

Donc  $\det(A) = 0$ . □

**Remarque 3.3.0.17.** *Ce théorème est particulièrement utile pour déterminer si une matrice est inversible avant de commencer le calcul de la matrice inverse.*

### Corollaire 3.18

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Si la matrice  $A$  est inversible alors

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

**Exemples.** 1. La matrice suivante est-elle inversible ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Nous allons calculer son déterminant. La colonne  $C_3$  contient quatre zéros. Développons directement par rapport à cette colonne.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} & \stackrel{\text{dév. } C_3}{=} (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} \\
& \stackrel{\text{dév. } L_3}{=} (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\
& \stackrel{\text{dév. } L_2}{=} (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\
& = 1 \times 3 - 1 \times 3 = 0
\end{aligned}$$

Donc  $\det(A) = 0$ .  $A$  n'est pas inversible.

2. Déterminer les valeurs du paramètre  $k \in \mathbb{R}$  pour lesquelles la matrice

$$A(k) = \begin{bmatrix} k-1 & 0 & 1 \\ 0 & k-2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

est inversible.

La matrice  $A(k)$  est inversible si et seulement si  $\det(A(k)) \neq 0$ . Développons selon la première ligne qui contient un zéro.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} k-1 & 0 & 1 \\ 0 & k-2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} & \stackrel{\text{dév. } L_1}{=} (k-1) \cdot \begin{vmatrix} k-2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & k-2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\
& = (k-1)(3(k-2) - (-2)) + (0 - 2(k-2)) \\
& = (k-1)(3k-6+2) - 2k+4 \\
& = (k-1)(3k-4) - 2k+4 \\
& = 3k^2 - 4k - 3k + 4 - 2k + 4 \\
& = 3k^2 - 9k + 8
\end{aligned}$$

La matrice  $A(k)$  est inversible si et seulement si  $3k^2 - 9k + 8 \neq 0$ .

Réolvons  $3k^2 - 9k + 8 = 0$  avec  $\Delta = 81 - 96 = -15 < 0$ .

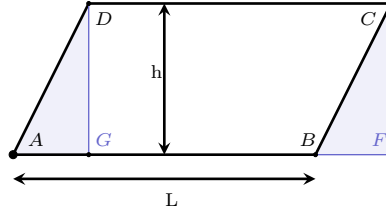
Comme le discriminant est négatif, l'équation n'a pas de racines réelles.

La matrice  $A(k)$  est donc inversible pour tout  $k \in \mathbb{R}$ .

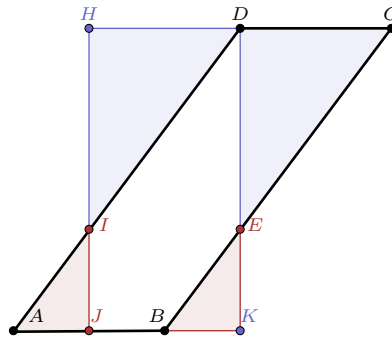
## 3.5 Interprétation géométrique du déterminant

### 3.5.1 Rappel : aire d'un parallélogramme

L'aire du parallélogramme  $ABCD$  est  $\mathcal{A}_{ABCD} = Lh$ , où  $L = AB = CD$  et  $h$  est la hauteur du parallélogramme issue de  $AB$ . C'est la même aire que le rectangle  $GFCD$ , obtenu en découpant le triangle  $AGC$  et en le recollant le long de  $BD$ .



Cette formule ne dépend pas du côté choisi comme base. En effet, sur la figure suivante, l'aire du parallélogramme  $ABCD$  est aussi égale à l'aire du rectangle  $JKDH$  obtenu en découpant le triangle  $CDE$  et en le recollant le long de  $DI$ , puis en découpant le triangle  $AIJ$  et en le recollant le long de  $BE$ .



### 3.5.2 Déterminant et parallélogramme

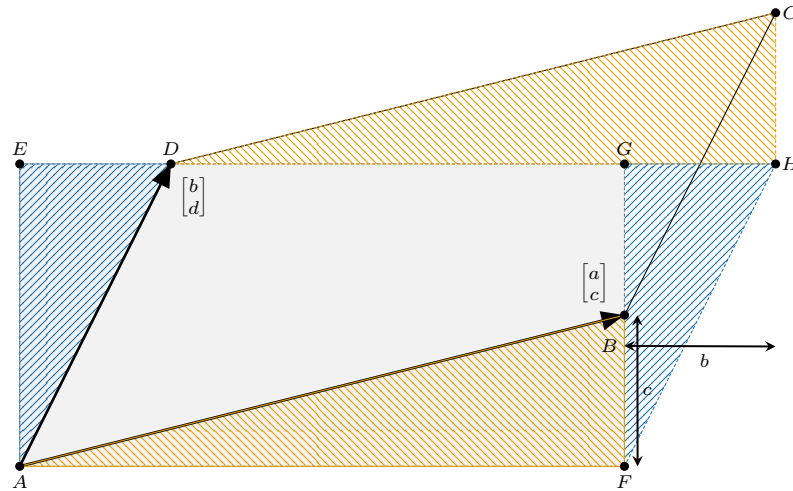
#### Théorème 3.19

Soit  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  une matrice  $2 \times 2$ . L'aire du parallélogramme défini par les vecteurs colonnes de  $A$  est égale à  $|\det(A)|$  (valeur absolue du déterminant). Plus précisément :

$$\text{Aire} = \left| \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right| = |ad - bc|$$

*Démonstration.* Commençons par remarquer que si les vecteurs colonnes de  $A$  sont colinéaires, alors ils définissent un parallélogramme plat, et  $\det(A) = 0$ .

Si les colonnes de  $A$  ne sont pas colinéaires, la figure suivante montre que le parallélogramme défini par les vecteurs  $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$  a une aire de  $ad - bc$ , dans le cas où  $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$  et  $ad - bc > 0$ .



Le rectangle gris a une aire de  $ad$ . Ce rectangle couvre partiellement le parallélogramme  $ABCD$ . Hors du parallélogramme  $ABCD$ , le rectangle gris couvre

- le triangle  $ABF$  hachuré en jaune, dont l'aire est égale à celle du triangle  $CHD$  aussi hachuré en jaune,
- et le triangle  $AED$  hachuré en bleu, dont l'aire est égale au triangle  $FGH$  aussi hachuré en bleu.

Donc finalement, l'aire  $ad$  comprend l'aire du parallélogramme  $ABCD$  et celle du parallélogramme  $BCHF$ . Or l'aire de  $BCHF$  est  $bc$ . Donc l'aire de  $ABCD$  est  $ad - bc$ .

Si  $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$  et  $ad - bc < 0$ , il suffit d'intervertir les colonnes de  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  et utiliser la propriété  $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}$ , pour se ramener au cas précédent.

Dans le cas où certains des coefficients  $a, b, c$  ou  $d$  sont négatifs, le même type de raisonnement fonctionne, avec un découpage adapté qui tient compte des signes. □

### 3.5.3 Déterminant et parallélépipède

#### Théorème 3.20

Soit  $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$  une matrice  $3 \times 3$ . Le volume du parallélépipède défini par les vecteurs colonnes de  $A$  est égal à  $|\det(A)|$ .

**Remarque 3.3.0.21.** Ces interprétations géométriques expliquent pourquoi :

- Si  $\det(A) = 0$ , les vecteurs colonnes sont coplanaires (en dimension 3) ou colinéaires (en dimension 2), et le volume ou l'aire étant nul.
- En dimension  $n$ , le déterminant mesure le « volume  $n$ -dimensionnel » du paralléloétope défini par les colonnes de la matrice.